Teoria operatorów nieograniczonych

Lista 1 (elementarz teorii przestrzeni Hilberta oraz operatorów ograniczonych)

Zad 1. Pokazać, że $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x|y) + \|y\|^2$ dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni pre-Hilbertowskiej.

Zad 2. Niech H będzie przestrzenią pre-Hilbertowską i niech $x, y \in H$. Wykazać

a) $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (*nierówność Cauchy'ego-Schwartza*)

b) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*nierównosc trójkąta*)

gdzie $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Wysnuć stąd wniosek, że przestrzeń pre-Hilbertowska jest w naturalny sposób przestrzenią unormowaną oraz że w topologii zadanej przez metrykę $d(x,y) = \|x-y\|$ iloczyn sklarany $(x|y)$ jest ciągły ze względu na obie współrzędne.

Zad 3. Sprawdzić, czy podany wzór określa iloczyn skalarny:

a) $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x(n)}y(n)$ w przestrzeni ciągów (absolutnie) sumowalnych w kwadracie,

b) $(x|y) = \int_a^b \overline{x(t)}y(t)\,dt$ w przestrzeni funkcji (absolutnie) całkowalnych w kwadracie na przedziale $[a,b]$.

Zad 4 (*wzór polaryzacyjny*)**.** Pokazać, że dla x, y należących do przestrzeni pre-Hilbertowskiej zachodzi wzór $(x|y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$. Zatem, iloczyn skalarny (jeśli istnieje) jest przez normę wyznaczony jednoznacznie.

Zad 5 (*uogólniona tożsamość równoległoboku*)**.** Pokazać, że jeżeli $x, y \in H$ są wektorami zespolonej przestrzeni unitarnej H oraz $\alpha \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia N, to

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|x + \alpha^k y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Zad 6. Niech $N > 1$. Pokazać, że przestrzeń unormowana $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1,\infty)$, z tak zwaną p-tą normą $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$ spełnia tożsamość równoległoboku wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Zad 7. Niech H będzie przestrzenią pre-Hilbertowską i niech $x, y \in H$. Pokazać, że jeśli $x \perp y$, to

a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (*twierdzenie Pitagorasa*),

b) $\|x+y\| = \|x-y\|$ (*twierdzenie o równości długości przekątnych prostokąta*).

Wykazać, że jeśli H jest przestrzenią rzeczywistą, to prawdziwe są także implikacje odwrotne, jeśli zaś H jest przestrzenią zespoloną to implikacje odwrotne nie mają miejsca.

Zad 8. Pokazać, że w zespolonej przestrzeni pre-Hilbertowskiej następujące warunki są równoważne

a) $x \perp y$, b) $\|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, c) $\forall_{t\in\mathbb{C}}\ \|x+ty\| = \|x-ty\|$.

Zad 9 (charakteryzacje wypukłości)**.** Niech Δ będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni unormowanej. Uzasadnić, że następujące warunki są równoważne:

i) $x, y \in \Delta \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \in \Delta$ (zamkniętość na branie średniej arytemtycznej)

ii) $x, y \in \Delta$, $\lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \Delta$ (zamkniętość na kombinacje wypukłe)

Zad 10. Niech x, y będą niezerowymi wektorami przestrzeni Hilberta H. Wyznaczyć rozkład ortogonalny $x = x'' + x^{\perp}$, gdzie $x'' \in K$, $x^{\perp} \in K^{\perp}$ i K jest jednowymiarową podprzestrzenią H rozpiętą przez y.

Zad 11. W przestrzeni $L^2[0,1]$ ("funkcji" całkowalnych w kwadracie) wyznaczyć odległość punktu $x(t) = t$ od podprzestrzeni $K = \{x \in L^2[0,1] : \int_0^1 e^t x(t)dt = 0\}$.

Zad 12. W przestrzeni ℓ^2 (ciągów sumowalnych w kwadracie) wyznaczyć podprzestrzeń ortogonalną $K^\perp$ do K:

a) $K = \{x \in \ell^2 : x(1) + x(2) = 0\}$ *b)* $K = \{x \in \ell^2 : x(1) = x(2)\}$

c) $K = \{x \in \ell^2 : x(2n) = 0, n \in \mathbb{N}\}$ *d)* $K = \{x \in \ell^2 : x(1) = x(3) = x(5) = ...\}$.

Zad 13. Niech $a : X \to Y$ będzie operatorem liniowym między dwoma przestrzeniami unormowanymi X, Y. Udowodnić, że następujace warunki sa równoważne

i) a jest operatorem ciągłym,

ii) a jest operatorem ciągłym w zerze,

iii) $\sup_{\|x\|\le 1} \|ax\| < \infty$,

iv) a jest operatorem ograniczonym.

Zauważyć przy tym, że jeśli A jest ograniczony, to

$$\|a\| = \inf\{C : \|ax\| \le C\|y\| \text{ dla każdego } x\} = \sup_{\|x\|\le 1} \|ax\|.$$

Zad 14. Pokazać, że przestrzeń operatorów ograniczonych $B(X,Y)$ wraz z działaniami określonymi punktowo i normą operatorową stanowi przestrzeń unormowaną, która jest przestrzenią Banacha, o ile Y jest przestrzenią Banacha.

Zad 15. Wykazać, że przestrzeń Banacha $B(X)$ operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X wraz z mnożeniem zdefiniowanym jako złożenie operatorów jest algebrą Banacha.

Zad 16. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Wykazać, że sprzężenie hermitowskie określa na algebrze Banacha $B(H)$ operację $^* : B(H) \to B(H)$ posadającą następujące własności

i) $(a^*)^* = a$, (inwolutywność)

ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$ (addytywność),

iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ (anty-jednorodność),

iv) $(ab)^* = b^* a^*$ (anty-multiplikatywność),

gdzie $a, b \in B(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, oraz zachodzi tak zwana C^*-równość

$$\|a\|^2 = \|a^* a\|.$$